Complex Number

الاعداد المركبة

Complex No. : consist of two parts . Real part (a) and Imaginary part (ib) . We will represent complex no as Z

$$Z = a + ib$$

a: الجزء الحقيقي — ib: الجزء التخيلي

Where $i = \sqrt{-1}$

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$
$$i^3 = (\sqrt{-1})^2 i = -i$$
$$i^4 = (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{-1})^2 = -1 * -1 = 1$$

✱ Algebric Opration on complex no.

① Addition (جمع) and Subtraction (طرح)

if $Z_1 = a_1 + ib_1$, $Z_2 = a_2 + ib_2$

$$\therefore Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

ex/ Find $Z_1 + Z_2$ and $Z_1 - Z_2$ if $Z_1 = 4 + 2i$, $Z_2 = 3 - i$

Sol/ $Z_1 + Z_2 = (4+3) + (2-1)i = 7 + i$

$$Z_1 - Z_2 = (4-3) - (2-1)i = 1 - i$$

② Multiplication (الضرب)

if $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$

$\therefore z_1 * z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

ex/ Find $(2-5i)(-1+3i)$

Sol$_1$/ $((2*-1) - (-5*3)) + ((2*3) + (-1*-5))i$

$(-2+15) + (6+5)i = \boxed{13 + 11i}$

* الحل باستخدام القانون وهناك طريقة اخرى بضرب الاقواس

حل اخر

Sol$_2$/ $(2*-1) + (2*3i) + (-5i*-1) + (-5i*3i)$

$= -2 + 6i + 5i - 15i^2$ ($i^2 = -1$)

$= -2 + 11i + 15 = \boxed{13 + 11i}$

③ Conjugate of complex no. (مرافق العدد المركب)

مرافق العدد المركب هو العدد المركب نفسه مع قلب اشارة الجزء التخيلي

if $z = a+ib$ then the conjugate is $\bar{z}$.

$\bar{z} = a - ib$ and if $z = a - bi$ then $\bar{z} = a + ib$

* X تغير اشارة الجزء الحقيقي.

ex/ Find the conjugate of $z = 5 - 3i$

Sol/ $\bar{z} = 5 + 3i$

* حاصل جمع عددين مركبين مترافقين يؤدي الى مجموع الجزئين الحقيقيين فقط.

ex/ Find $z_1 + \bar{z}_1$ if $z = 3+i$, $\bar{z} = 3-i$

$$z + \bar{z} = 3+i+3-i = 6$$

$$\therefore \boxed{z + \bar{z} = 2a}$$

* حاصل طرح عددين مركبين مترافقين يكون الآتي

$$z - \bar{z} = \mp 2bi \quad \begin{matrix} +2b \\ \text{او} \\ -2b \end{matrix} \quad \text{حسب اشارة العدد ومرافقه ووضعها في العملية}$$

ex/ if $z = 3-i$, $\bar{z} = 3+i$ find

$$z - \bar{z} = (3-i) - (3+i) = (3-i) + (-3-i) = -2i$$

$$\bar{z} - z = (3+i) - (3-i) = 2i$$

* حاصل ضرب عددين مركبين مترافقين يمثل الآتي :

if $z = a+ib$, $\bar{z} = a-bi$

$$\boxed{z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z = a^2 + b^2}$$ مربع الجزء الحقيقي + مربع الجزء التخيلي

* يمكن الاستفادة من هذه الخاصية للتخلص من i عندما يأتي بالمقام وذلك بالضرب في مرافق العدد الذي في المقام

ex / Find $z * \bar{z}$ if $z = 3+i$

مباشرة $(3)^2+(1)^2 = 10$

Sol / $\bar{z} = 3-i$

$$z * \bar{z} = (3+i)*(3-i) = (3)^2 + (-1)^2 = 9+1 = 10$$

(4) Division of complex no. (4) قسمة الاعداد المركبة

لايجاد حاصل قسمة عددين مركبين نجعل كل من البسط والمقام بالصيغة الجبرية (التقليدية) ثم يجب التخلص من i في المقام وذلك بضرب البسط والمقام في مرافق العدد.

EX/ Find $\frac{3+2i}{2-i}$

$$\frac{3+2i}{2-i} * \frac{2+i}{2+i} = \frac{(6+3i)+(4i-2)}{(2)^2+(1)^2} = \frac{4+7i}{4+1}$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

ex/ Find the conjugate of $\frac{3+4i}{3-i}$

Sol/ $\frac{3+4i}{3-i} * \frac{3+i}{3+i} = \frac{(9+3i+4i-4)}{(3)^2+(1)^2} = \frac{5+7i}{10}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{7}{10}i \xrightarrow{\text{conjugate}} \frac{1}{2} - \frac{7}{10}i$$

Algebric Properties: الخواص الجبرية

if $z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots$ then

① $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ } commutative law (خاصية ابدالية)

② $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
$(z_1 \cdot z_2) z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ } associative law (الخاصية التجميعية)

③ $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 \cdot z_3$ } distribution (توزيع)

④ The zero (additive identity) of the system of complex no. is the number $\boxed{0 = 0 + 0i}$ and the (multiplicative identity) is the number $\boxed{1 = 1 + 0i}$.

$z + 0 = z$ * العنصر المحايد في عملية الجمع هو (0)

$z \cdot 1 = z$ * العنصر المحايد في عملية الضرب هو (1)

⑤ additive number $(-z)$

$z + (-z) = 0$ * لايجاد العنصر المحايد في عملية الجمع نوجد $(-z)$

⑥ For any non-zero complex no. $z = a + ib$ there is one and only one complex no. which we will denoted by $z^{-1} = \frac{1}{z}$ such that $z \cdot z^{-1} = 1$

* لايجاد العنصر المحايد في عملية الضرب نوجد z^{-1}

ملاحظة / يعني الخواص المتعلقة بموزوج conjugate

① $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ if $z_2 \neq 0$, $\overline{\overline{z}} = z$

Ex_1 /

$$(2+3i)+(6-2i)=(2+6)+(3-2)i=8+i$$

Ex_2 /

$$(2+3i)-(6-2i)=(2-6)+(3-(-2))i=-4+5i$$

Ex_3 / $(2+3i)(6-2i)=2*6+2(-2)i+3i*6+3i*(-2)i$

$$=12-4i+18i-6i^2$$

$$=12+14i-6=18+14i$$

Ex_4 / $\dfrac{2+3i}{6-2i}=\dfrac{2+3i}{6-2i}*\dfrac{6+2i}{6+2i}=\dfrac{12+4i+18i+6i^2}{36+4}$

$$=\frac{6+22i}{40}=\frac{3}{20}+\frac{11}{20}i$$

Ex_5 / Find $\bar{z}^{-1}$ if $z=i$

$$\bar{z}^{-1}=i^{-1}=\frac{1}{i}*\frac{-i}{-i}=\frac{-i}{-i^2}=\frac{-i}{1}=-i$$

Ex_6 / Find $\bar{z}^{-1}$ if $z=2-3i$

$$\bar{z}^{-1}=(2-3i)^{-1}=\frac{1}{2+3i}*\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4+9}$$

$$=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

$\boxed{z*\bar{z}^{-1}=1}$ * للتأكد اذا كانت النتيجة صحيحة نطبق القانون

$$(2-3i)\cdot\left(\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i\right)=\left(\frac{4}{13}+\frac{6}{13}i-\frac{6}{13}i+\frac{9}{13}\right)$$

$$=\frac{13}{13}=\boxed{1}$$

Ex6/ Show that each of the two numbers $z = 1 \pm i$ satisfies the equation $z^2 - 2z + 2 = 0$

Sol/

$z = 1 + i$

$z^2 - 2z + 2 = 0$

$(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 0$

$1 + 2i - 1 - 2 - 2i + 2 = 0$

$0 = 0$

H.W

$z = 1 - i$

Ex7/ Show that $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

Sol/ $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2$

$= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) + (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})$

$= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$

$= z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$

$= 2(z_1\bar{z}_1) + 2(z_2\bar{z}_2)$

$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

H.W

① Is the equation $z^2 + z + 1 = 0$ has two solution

$$z = \frac{-1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

② If $z_1 = \frac{3+2i}{i}$, $z_2 = \frac{2}{1+i}$

Find ① $z_1 + z_2$ ② $z_1 - z_2$ ③ $z_1 \cdot z_2$ ④ $\frac{z_1}{z_2}$